Dérivation

I. Nombre dérivé et tangente :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, $\mathcal{C}$ sa représentation graphique dans un repère et A, le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse a.

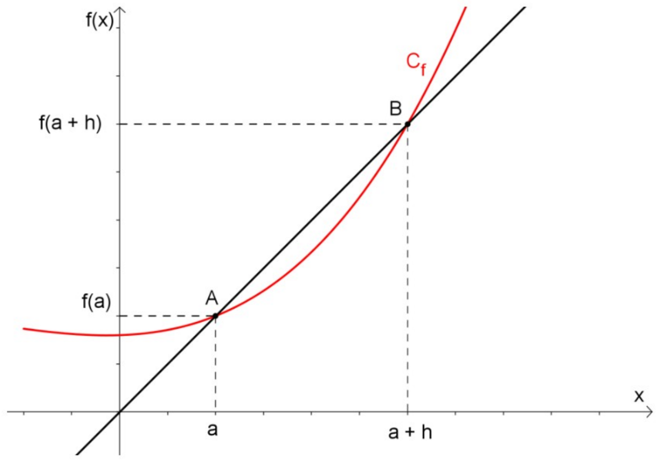
Définition :

Le taux de variation de la fonction f entre a et b, avec a ≠ b, est le quotient : $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Avec b = a + h et h ≠ 0, ce quotient s'écrit aussi r(h) = $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

Interprétation graphique :

Soient A et B les points de coordonnées A(a ;f(a)) et B(a + h ;f(a + h)).
Le coefficient directeur de la droite (AB) est égal à r(h)



Nombre dérivé :

Supposons que pour des valeurs de h de plus en plus proches de zéro, (avec h ≠ 0), r(h) devient de plus en plus proche d'un nombre fixé l.
On dit que l'on cherche la limite de r(h) quand h tend vers 0.
On écrit $\lim\limits_{h\to 0} r(h)$ =l et on lit « limite de r(h) quand h tend vers 0 ».

Définition :

On dit alors que la fonction f est dérivable en a et que l est le nombre dérivé de f en a.

Ce nombre dérivé est noté f'(a) avec : f'(a) = $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

Exemple :

On considère la fonction f : x ↦x² et a = 1.
Alors f(a + h) = f(1 + h) = (1 + h)² = 1 + 2h + h² et f(a) = f(1) = 1² = 1
Donc $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=\dfrac{1+2h+h^2-1}{h}=\dfrac{2h+h^2}{h}=2+h$ et f'(1)= $\lim\limits_{h\to 0} 2+h=2$

Créé par Yael Nessim

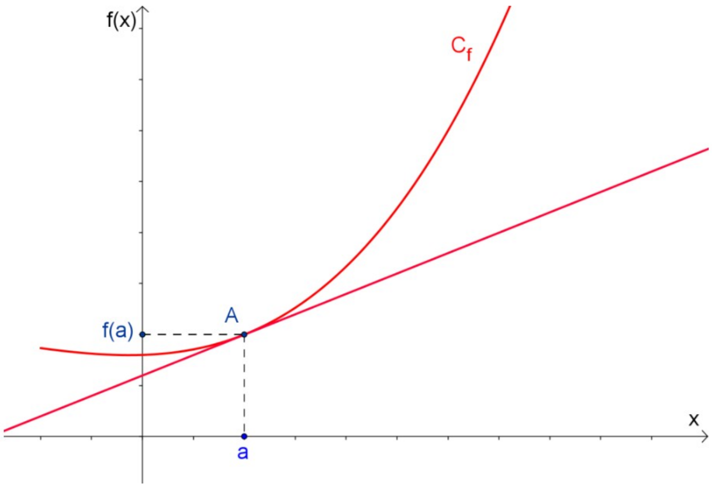
Tangente en un point à une courbe :

Graphiquement, lorsque h tend vers 0, le point B de $\mathcal{C}_f$ se rapproche de A.
Le coefficient directeur de (AB) tend vers f'(a) lorsque B se rapproche de A.

Définition :
Si f est dérivable en a, on appelle tangente en A à la courbe $\mathcal{C}_f$ la droite qui passe par A et qui a pour coefficient directeur le nombre dérivé f'(a).

Vocabulaire :
Le point A(a ;f(a)) est le point de contact de la tangente et de $\mathcal{C}_f$

Remarque :
Si f'(a) = 0, la tangente en A est parallèle à l'axe des abscisses.



Equation de la tangente à au point d'abscisse a : **y = f'(a)(x – a) + f(a)**

II. Fonction dérivée

Définition :

Si f est une fonction dérivable en tout point a d'un intervalle I, on dit que f est dérivable sur I.
La fonction qui, à chaque réel x de I, associe le nombre dérivé f'(x) de f en x est appelée fonction dérivée de f et se note f'.

Exemple :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par f(x) = x^2.
Déterminons la fonction dérivée f' de f si elle existe.
On étudie le rapport r(h) = $\frac{(a+h)^2-a^2}{h}=\frac{a^2+2ah+h^2-a^2}{h}=\frac{2ah+h^2}{h}=2a+h$

La limite de r(h) lorsque h tend vers 0 est 2a.
Donc la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et f'(a) = 2a.
La fonction dérivée f' de f est donc définie par f'(x) = 2x pour tout x de $\mathbb{R}$.

Dérivée de fonctions usuelles :

Type de fonction	Fonction dérivée
Fonctions affines définies sur ℝ $f(x) = mx + p$	f est dérivable sur ℝ. et $f'(x) = m$
Fonctions puissances définies sur ℝ $f(x) = x^n$ avec n entier naturel non nul	f est dérivable sur ℝ. et $f'(x) = nx^{n-1}$
Fonction inverse définie sur $]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$. $f(x) = \frac{1}{x}$	f est dérivable sur $]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$ et $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
Fonction racine carrée définie sur $[0\,;+\infty[$. $f(x) = \sqrt{x}$	f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

III. Dérivations et opérations :

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I.

Propriétés :

- La somme u + v est dérivable sur I et : **(u + v)' = u' + v'.**
- Le produit u $u\times v$ de deux fonctions dérivables sur un intervalle I est une fonction
- dérivable sur I et : **(uv)' = u'v + uv'**
- Le produit k $k\times u$, avec k constante réelle, est dérivable sur I et **(ku)' = ku'**.
- Le carré de u² est dérivable sur I et **(u²)' = 2u'u**.
- L'inverse $\frac{1}{v}$ de v avec v(x)≠ 0 sur I, est dérivable sur I et $\left(\frac{1}{v}\right)'=-\frac{v'}{v^2}$
- Le quotient $\frac{u}{v}$, avec v(x) ≠ 0 sur I, est dérivable sur I et $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

Exemples :

1. La fonction f définie sur ℝ par $f(x) = x^2 + 3x$ est la somme de deux fonctions u et v définies par $u(x) = x^2$ et $v(x) = 3x$.
u et v sont deux fonctions dérivables sur a ℝ vec $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = 3$.
Donc f est dérivable sur ℝ et $f'(x) = u'(x) + v'(x) = 2x + 3$

2. La fonction f définie sur ℝ par $f(x)=2x(3x+1)$ est le produit de deux fonctions u et v définies sur ℝ par $u(x)=2x$ et $v(x)=3x+1$
u et v sont deux fonctions dérivables sur a ℝ vec $u'(x) = 2$ et $v'(x) = 3$.
Donc f est dérivable sur ℝ et $f'(x)=u'(x)\times v(x)+u(x)\times v'(x)=2\times(3x+1)+2x\times3$
Soit $f'(x) = 6x + 2 + 6x = 12x + 2$

3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 7x^2$.
$f(x)$ est de la forme $k \times u(x)$ avec $k = 7$ et $u(x) = x^2$.
Donc $f'(x) = k \times u'(x) = 7 \times 2x = 14x$

4. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2 + 1)^2$.
$f(x)$ est de la forme $(u(x))^2$ avec $u(x) = x^2 + 1$.
Or $u'(x) = 2x$
Donc $f'(x) = 2 \times u'(x) \times u(x) = 2 \times 2x \times (x^2+1) = 4x(x^2+1)$

5. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{3x^2+4}$

f(x) est de la forme $\dfrac{1}{v(x)}$ avec $v(x) = 3x^2 + 4$.
Or $v'(x) = 3 \times 2x = 6x$
Donc $f'(x) = -\dfrac{v'(x)}{(v(x))^2} = -\dfrac{6x}{(3x^2+4)^2}$

6. Soit f la fonction définie sur I =]- ∞ ;-1[∪]-1 ; + ∞[par $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+1}$

$f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = 2x - 1$ et $v(x) = x + 1$.
f est dérivable sur I et $f'(x) = \dfrac{u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x)}{(v(x))^2}$
Or $u'(x) = 2$ et $v'(x) = 1$.
Donc $\dfrac{2 \times (x+1) - (2x-1) x 1}{(x+1)^2} = \dfrac{2x+2-2x+1}{(x+1)^2} = \dfrac{3}{(x+1)^2}$